Euler-Maclaurin 公式的推广及其应用

参赛队员　景琰杰

指导老师　施洪亮

学校　华东师范大学第二附属中学

摘要

本文首先用一种不同于常见文献中的方法重新证明了 Euler-Maclaurin 公式，然后为了后面的工作，给出了关于 Bernoulli 数的一些恒等式.在第三部分本文用这一公式给出了一些常见的求和式的计算.在第四部分，本文用类似的方法得到了其他一些递推关系的级数解，推广了 Euler-Maclaurin 公式. 在第五部分，本文叙述了一些把级数转化成定积分的例子. 在第六部分，本文继续利用 Euler-Maclaurin 公式给出了处理一些级数的例子，得出了一些求和式的阶. 个人认为本文最有意义的讨论在第一、第四、第五、第六部分.

引言

在 18 世纪，Euler 和 Maclaurin 分别独立地得到了一个求和公式. 它立刻成为分析中很重要、很强有力的一个工具，之后围绕它展开的研究络绎不绝，极大地丰富了分析的内容. 他们的这个公式最早是应用于级数的求和，包括给出求和式的阶(甚至是渐近级数). 本文用一种不同的方法重新证明了它，并作了初步的推广，之后讨论了它的一些应用.

定义

称 $f(x)$ 的差分为 $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$. 如果存在一个函数 $F(x)$ 使得 $F(x+1)-F(x)=f(x)$, 则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的反差分, 记为 $\sum f(x)\Delta x$. 易知如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的反差分, 则 $F(x)+C$ 也是, 其中 C 是一个周期为 1 的函数(包括常数), 反过来也成立[1]. 易知 $\sum_{x=x_0}^{x_n} f(x)=\sum_{x=x_0}^{x_n}(F(x+1)-F(x))=F(x_n+1)-F(x_0)$, 称为 $f(x)$ 的求和, 记为 $\sum_{x_0}^{x_n} f(x)\Delta x$. 易知一个函数确定了上下限的求和是唯一的.

正文

1. Euler-Maclaurin 公式的证明

现在我们用分析工具来处理求和式的计算.

引理 1: $\dfrac{d}{dx}\int_x^{x+1} f^{(n+1)}(t)\dfrac{(x+1-t)^n}{n!}dt=\int_x^{x+1} f^{(n+2)}(t)\dfrac{(x+1-t)^n}{n!}dt$.

证明:

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x+1} f^{(n+1)}(t)\frac{(x+1-t)^n}{n!}dt=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_{x+\Delta x}^{x+\Delta x+1} f^{(n+1)}(t)\frac{(x+\Delta x+1-t)^n}{n!}dt-\int_x^{x+1} f^{(n+1)}(t)\frac{(x+1-t)^n}{n!}dt\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_{x+\Delta x}^{x+\Delta x+1} f^{(n+1)}(t)\frac{(x+\Delta x+1-t)^n}{n!}dt-\int_{x+\Delta x}^{x+\Delta x+1} f^{(n+1)}(t)\frac{(x+1-t)^n}{n!}dt\right)$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_{x+\Delta x}^{x+\Delta x+1} f^{(n+1)}(t)\frac{(x+1-t)^n}{n!}dt-\int_x^{x+1} f^{(n+1)}(t)\frac{(x+1-t)^n}{n!}dt\right)$$

$$=\int_x^{x+1} f^{(n+1)}(t)\frac{\partial}{\partial x}\frac{(x+1-t)^n}{n!}dt+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_{x+1}^{x+\Delta x+1} f^{(n+1)}(t)\frac{(x+1-t)^n}{n!}dt-\int_x^{x+\Delta x} f^{(n+1)}(t)\frac{(x+1-t)^n}{n!}dt\right)$$

$$=\int_x^{x+1} f^{(n+1)}(t)\frac{(x+1-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt+\lim_{t\to x+1} f^{(n+1)}(t)\frac{(x+1-t)^n}{n!}-\lim_{t\to x} f^{(n+1)}(t)\frac{(x+1-t)^n}{n!}$$

$$=-f^{(n+1)}(t)\frac{(x+1-t)^n}{n!}\bigg|_x^{x+1}+\int_x^{x+1} f^{(n+2)}(t)\frac{(x+1-t)^n}{n!}dt-\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}=\int_x^{x+1} f^{(n+2)}(t)\frac{(x+1-t)^n}{n!}dt.$$

定理 1(Euler-Maclaurin): 如果 $f(x)$ 存在所需阶导数, 则

$\sum_{x=1}^{k} f(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{b_n}{n!}(f^{(n-1)}(k+1)-f^{(n-1)}(1))+R_N$, 其中 R_N 为余项.

证明: 由 Taylor 公式,

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+\frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\Delta x^n+\int_x^{x+\Delta x}f^{(n+1)}(t)\frac{(x+\Delta x-t)^n}{n!}dt.$$

取 $\Delta x=1$, 得 $f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{f''(x)}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}+\int_x^{x+1}f^{(n+1)}(t)\frac{(x+1-t)^n}{n!}dt$.

$$f(x+1)-f(x)=f'(x)+\frac{f''(x)}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}+\int_x^{x+1}f^{(n+1)}(t)\frac{(x+1-t)^n}{n!}dt.$$

设 $f(x+1)-f(x)=g(x)$, 则 $g(x)=f'(x)+\frac{f''(x)}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}+\int_x^{x+1}\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x+1-t)^n dt$.

在上式两边对 x 求导, 得 $g'(x)=f''(x)+\frac{f'''(x)}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}+\int_x^{x+1}f^{(n+2)}(t)\frac{(x+1-t)^n}{n!}dt$

$$=f''(x)+\frac{f'''(x)}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}+\int_x^{x+1}f^{(n+1)}(t)\frac{(x+1-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt.$$

则 $g(x)-\frac{1}{2}g'(x)=f'(x)-\frac{f'''(x)}{12}+\ldots+\frac{(2-n)f^{(n)}(x)}{2\cdot n!}+\int_x^{x+1}f^{(n+1)}(t)\left(\frac{(x+1-t)^n}{n!}-\frac{(x+1-t)^{n-1}}{2\cdot(n-1)!}\right)dt$.

用类似的方法依次消去 $f'''(x)\ldots f^{(n)}(x)$.

设 $f'(x)=a_0g(x)+a_1g'(x)+\ldots+a_ng^{(n)}(x)+\int_x^{x+1}f^{(n+1)}(t)\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k(x+1-t)^{n-k}}{(n-k)!}dt$, 则根据上述关系,

应有 $a_0=1$, $\frac{a_0}{n!}+\frac{a_1}{(n-1!)}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{1!}=0$. 设 $a_n=\frac{b_n}{n!}$, 则 $\frac{b_0}{0!\cdot n!}+\frac{b_1}{1!\cdot(n-1!)}+\ldots+\frac{b_{n-1}}{(n-1)!\cdot 1!}=0$,

$\frac{1}{n!}\cdot\left(\binom{n}{0}b_0+\binom{n}{1}b_1+\ldots+\binom{n}{n-1}b_{n-1}\right)=0$, $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}b_k=0$. $\therefore b_n$ 为 Bernoulli 数.

$a_n=\frac{B_n}{n!}$, $f'(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!}g^{(k)}(x)+\int_x^{x+1}f^{(n+1)}(t)\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k(x+1-t)^{n-k}}{k!\cdot(n-k)!}dt$.

对上式两边积分, 得 $f(x)=\int_{t_0}^{x}f'(t)dt=\sum_{n=0}^{N}\frac{B_n}{n!}g^{(n-1)}(x)+R_N$.

从而 $\sum_{x=1}^{k}f(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{B_n}{n!}(f^{(n-1)}(k+1)-f^{(n-1)}(1))+R_N$.

上式即是所谓的 Euler-Maclaurin 公式. 当 $f(x)$ 满足一定的条件时, 选取合适的 N, 可以使误差项 R_N 控制在可以忽略的范围内, 此时前面的有限项即给出了求和式的主要部分.

这个证明是我自己想出来的, 但是后来发现结果是已知的. 我得出的结论可以对一些求和式的阶给出预期的结果. 通过更进一步的分析可以讨论对 $f(x)$ 的要求以及误差项的范围.

当 $f(x)$ 发散得不太快时, 往往有 $R_N\to 0(N\to\infty)$. 在下面的讨论中我们总是假定如此(可以证明下面讨论的求和式都成立). 此时上式变成 $\sum_{x=1}^{k}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(f^{(n-1)}(k+1)-f^{(n-1)}(1))$.

2. 有关 Bernoulli 数的恒等式

为了应用这个公式, 首先需要建立一些有关 Bernoulli 数的恒等式. 根据 Bernoulli 数的生成函数 $\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$, 首先需要得出 $\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$ 的收敛域.

引理 1: $\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$ 的收敛域为 $|x|<2\pi$.

证明: 函数 $\frac{x}{e^x-1}$ 的模最小的奇点为 $x=\pm 2\pi i$, 故在 $|x|<2\pi$ 内 $\frac{x}{e^x-1}$ 解析, 其 Taylor 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$ 收敛.

因此, 在其收敛域内, 我们可以对此级数逐项微分或积分.

定理 2: (1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}=\frac{1}{e-1}$;

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}=\frac{e}{e-1}$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{B_{2n}}{(2n)!}=\frac{1}{2}\cot\left(\frac{1}{2}\right)$;

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{n!}=-\frac{1}{(e-1)^2}$; $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n+2}}{n!}=-\frac{e(e-3)}{(e-1)^3}$; $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n+3}}{n!}=\frac{2e(e^2-2e-2)}{(e-1)^4}$; ...

证明: 在 $\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$ 中取 $x=1$, 得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}=\frac{1}{e-1}$.

用 $-x$ 替换 x, 得 $\frac{-x}{e^{-x}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}x^n$. 取 $x=1$, 得 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}=\frac{-1}{e^{-1}-1}=\frac{e}{e-1}$.

$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=\frac{x}{2}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)=\frac{x}{2}\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}\right)=\frac{x}{2}\coth\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}$. 用 ix 替换 x, 得

$\frac{ix}{2}\coth\left(\frac{ix}{2}\right)=\frac{x}{2}\cot\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}(ix)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}$. 取 $x=1$, 得 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{B_{2n}}{(2n)!}=\frac{1}{2}\cot\left(\frac{1}{2}\right)$.

$\frac{d}{dx}\frac{x}{e^x-1}=-\frac{xe^x-e^x+1}{(e^x-1)^2}=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{d}{dx}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{n!}x^n$, 取 $x=1$, 得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{n!}=-\frac{e-e+1}{(e-1)^2}=-\frac{1}{(e-1)^2}$.

类似地, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n+2}}{n!}=-\frac{e(e-3)}{(e-1)^3}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n+3}}{n!}=\frac{2e(e^2-2e-2)}{(e-1)^4}$, ...

3. Euler-Maclaurin 公式的初步应用

下面我们利用上式来求一些常用的求和式.

(1) $\sum_{x=1}^{k} x^s$

$$\sum x^s \Delta x = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} x^s = \sum_{n=o}^{s+1} \frac{B_n}{n!} \frac{s!\,x^{s-n+1}}{(s-n+1)!} = \sum_{n=o}^{s+1} \frac{\binom{s+1}{n} B_n x^{s-n+1}}{s+1}.$$

$$\sum_{x=1}^{k} x^s = \sum_1^{k+1} x^s \Delta x = \sum_{n=o}^{s+1} \frac{\binom{s+1}{n} B_n x^{s-n+1}}{s+1}\Bigg|_1^{k+1} = \sum_{n=o}^{s+1} \frac{\binom{s+1}{n} B_n (k+1)^{s-n+1}}{s+1} - \sum_{n=o}^{s+1} \frac{\binom{s+1}{n} B_n}{s+1}$$

$$= \sum_{n=o}^{s+1} \frac{\binom{s+1}{n} B_n (k+1)^{s-n+1}}{s+1} - \frac{\binom{s+1}{s+1} B_{s+1}}{s+1} = \sum_{n=o}^{s+1} \frac{\binom{s+1}{n} B_n (k+1)^{s-n+1} - B_{s+1}}{s+1}.$$

倒数第二个式子用到了 $\sum_{n=o}^{s} \frac{\binom{s+1}{n} B_n}{s+1} = 0$.

或者 $\sum_{x=1}^{k} x^s = \sum_{x=0}^{k} x^s = \sum_0^{k+1} x^s \Delta x = \sum_{n=o}^{s+1} \frac{\binom{s+1}{n} B_n x^{s-n+1}}{s+1}\Bigg|_0^{k+1} = \sum_{n=o}^{s+1} \frac{\binom{s+1}{n} B_n (k+1)^{s-n+1}}{s+1} - \frac{\binom{s+1}{s+1} B_{s+1}}{s+1}$

$$= \sum_{n=o}^{s+1} \frac{\binom{s+1}{n} B_n (k+1)^{s-n+1} - B_{s+1}}{s+1}.$$

设 $P(x)$ 是一个 s 次多项式, 则 $P^{(n)}(x)(n \ge s+1) = 0$, 它的反差分是一个 $s+1$ 次多项式. 我们可以用待定系数法求出它的反差分, 也可以先把它展开成 Newton 级数, 再求反差分. 这个公式提供了一个直接的表达式.

(2) $\sum_{x=0}^{k} e^x$

$$\sum e^x \Delta x = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^x = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{B_n}{n!} e^x = e^x \cdot \sum_{n=o}^{\infty} \frac{B_n}{n!} = \frac{e^x}{e-1}.$$

$$\sum_{x=0}^{k} e^x = \sum_0^{k+1} e^x \Delta x = \frac{e^x}{e-1}\Bigg|_0^{k+1} = \frac{e^{k+1}-1}{e-1}.$$

(3) $\sum_{x=1}^{k} x \cdot e^x$

首先证明一个引理:

引理 2: $\frac{d^n}{dx^n}\left(x\cdot e^x\right)=(x+n)\cdot e^x(n\in Z)$.

证明: 当$n=0$时, $\frac{d^0}{dx^0}\left(x\cdot e^x\right)=x\cdot e^x=(x+0)\cdot e^x$, 引理成立.

当$n\geq 0$时, 假设当$n=k$时引理成立. 则当$n=k+1$时,

$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left(x\cdot e^x\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^k}{dx^k}\left(x\cdot e^x\right)\right)=\frac{d}{dx}\left((x+n)\cdot e^x\right)=e^x+(x+n)\cdot e^x=(x+n+1)\cdot e^x$, 引理也成立.

所以当$n\geq 0$时引理成立.

当$n\leq 0$时, 假设当$n=k$时引理成立. 则当$n=k-1$时,

$\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left(x\cdot e^x\right)=\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}\left(\frac{d^k}{dx^k}\left(x\cdot e^x\right)\right)=\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}\left((x+n)\cdot e^x\right)=\int_{t_0}^{x}\left((t+n)\cdot e^t\right)dt=(x+n)\cdot e^x-\int_{t_0}^{x}e^t dt$

$=(x+n)\cdot e^x-e^x=(x+n-1)\cdot e^x$, 引理也成立. 所以当$n\leq 0$时引理成立.

综上, 当$n\in Z$时, 引理成立.

$$\sum x\cdot e^x\Delta x=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}x\cdot e^x=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(x+n-1)\cdot e^x=(x-1)\cdot e^x\cdot\sum_{n=o}^{\infty}\frac{B_n}{n!}+\sum_{n=o}^{\infty}\frac{B_n}{n!}n\cdot e^x$$

$$=\frac{(x-1)\cdot e^x}{e-1}+e^x\cdot\sum_{n=o}^{\infty}\frac{B_{n+1}}{n!}=\frac{(x-1)\cdot e^x}{e-1}-\frac{e^x}{(e-1)^2}.$$

$$\sum_{x=1}^{k}x\cdot e^x=\sum\nolimits_1^{k+1}x\cdot e^x\Delta x=\left.\left(\frac{(x-1)\cdot e^x}{e-1}-\frac{e^x}{(e-1)^2}\right)\right|_1^{k+1}=\frac{k\cdot e^{k+1}}{e-1}-\frac{e^{k+1}}{(e-1)^2}-\left(-\frac{e}{(e-1)^2}\right)$$

$$=\frac{k\cdot e^{k+1}}{e-1}-\frac{e^{k+1}}{(e-1)^2}+\frac{e}{(e-1)^2}=\frac{k\cdot e^{k+1}}{e-1}-\frac{e(e^k-1)}{(e-1)^2}.$$

类似地可以求出$\sum_{x=1}^{k}x^2\cdot e^x=\frac{k^2\cdot e^{k+1}}{e-1}-\frac{2k\cdot e^{k+1}}{(e-1)^2}+\frac{e(e+1)(e^k-1)}{(e-1)^3}$,

$\sum_{x=1}^{k}x^3\cdot e^x=\frac{k^3\cdot e^{k+1}}{e-1}-\frac{3k^2\cdot e^{k+1}}{(e-1)^2}+\frac{3k\cdot e^{k+1}(e+1)}{(e-1)^3}-\frac{e(e^2+4e+1)(e^k-1)}{(e-1)^3}$, ...

(4) $\sum_{x=1}^{k}\sin(x)$

$$\sum\sin(x)\Delta x=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\sin(x)=\sum_{n=o}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}\cos(x)-\frac{1}{2}\sin(x)=-\frac{1}{2}\cot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\cos(x)-\frac{1}{2}\sin(x)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\cos(x)+\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\sin(x)\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\cos(x)+\sin\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\sin(x)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\right)=-\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

$$\sum_{x=1}^{k}\sin(x)=\sum\nolimits_{1}^{k+1}\sin(x)\Delta x=-\left.\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\right|_{1}^{k+1}=-\frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)}+\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)}=-\frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)-\cos(\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$=-\frac{-2\sin(\left(\frac{k+1}{2}\right))\sin(\left(\frac{k}{2}\right))}{2\sin(\left(\frac{1}{2}\right))}=\frac{\sin\left(\frac{k+1}{2}\right)\sin\left(\frac{k}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

(5) $\sum\limits_{x=0}^{k}\cos(x)$

$$\sum\cos(x)\Delta x=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\cos(x)=\sum_{n=o}^{\infty}(-1)^n\frac{B_{2n}}{(2n)!}\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x)=\frac{1}{2}\cot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\sin(x)-\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\cos(x)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\sin(x)-\sin\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\cos(x)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\right)=\frac{\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\sum_{x=0}^{k}\cos(x)=\sum\nolimits_{0}^{k+1}\cos(x)\Delta x=\left.\frac{\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\right|_{0}^{k+1}=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)}+\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)+\sin\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{k+1}{2}\right)\cos\left(\frac{k}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{k+1}{2}\right)\cos\left(\frac{k}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

4. 常系数线性非齐次递推关系的求解

上面我们求的实际上是递推关系 $f(x+1)-f(x)=g(x)$ 的级数解. 用类似的方法我们可以再求出一些更一般的递推关系.

我们知道 $f(x+k)+p_{k-1}f(x+k-1)+\ldots+p_1f(x+1)+p_0f(x)=g(x)$ ($p_0,p_1,\ldots,p_{k-1}$ 为常数)的通解为 $f(x+k)+p_{k-1}f(x+k-1)+\ldots+p_1f(x+1)+p_0f(x)=0$ 的通解加上对应于 $g(x)$ 的特解. 下面的定理给出了得出 $g(x)$ 的特解的一种方法.

定理 3: 设使 $p_0\cdot 0^n+p_1\cdot 1^n+\ldots p_{k-1}\cdot(k-1)^n+k^n\neq 0(k\geq 1)$ ($p_0,p_1,\ldots,p_{k-1}$ 为常数)成立的最小自然数(非负整数)为 n_0(定义 $0^0=1$), 如果 $g(x)$ 存在所需阶导数, 则 $f(x+k)+p_{k-1}f(x+k-1)+\ldots+p_1f(x+1)+p_0f(x)=g(x)$ 的一个特解为

$$f(x)=\frac{n_0!}{k^{n_0}+p_{k-1}(k-1)^{n_0}+\ldots p_1\cdot 1^{n_0}+p_0\cdot 0^{n_0}}\sum_{n=0}^{N}\frac{b_n}{n!}g^{(i-n_0)}(x)+R_N\ (R_N\text{ 为余项}).$$

其中b_n由生成函数$\dfrac{x^{n_0}}{e^{kx}+p_{k-1}\cdot e^{(k-1)x}+\ldots+p_1\cdot e^x+p_0}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{b_n}{n!}x^n$给出.

证明: 由 Taylor 公式, $g(x)=f(x+k)+p_{k-1}f(x+k-1)+\ldots+p_1 f(x+1)+p_0 f(x)$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{(k^i+p_{k-1}(k-1)^i+\ldots p_1\cdot 1^i+p_0\cdot 0^i)f^{(i)}(x)}{i!}+R_n$$

$$=\sum_{i=n_0}^{n}\frac{(k^i+p_{k-1}(k-1)^i+\ldots p_1\cdot 1^i+p_0\cdot 0^i)f^{(i)}(x)}{i!}+R_n.$$

用定理 1 中的方法依次消去$f^{(n_0+1)}(x)\ldots f^{(n)}(x)$.

$$\therefore \exists a_i,\ \ni \frac{(k^{n_0}+p_{k-1}(k-1)^{n_0}+\ldots p_1\cdot 1^{n_0}+p_0\cdot 0^{n_0})f^{(n_0)}(x)}{n_0!}=\sum_{i=0}^{n-n_0}a_i g^{(i)}(x)+R_n.$$

$$\therefore f^{(n_0)}(x)=\frac{n_0!}{k^{n_0}+p_{k-1}(k-1)^{n_0}+\ldots p_1\cdot 1^{n_0}+p_0\cdot 0^{n_0}}\sum_{i=0}^{n-n_0}a_i g^{(i)}(x)+R_n,$$

$$f(x)=\frac{n_0!}{k^{n_0}+p_{k-1}(k-1)^{n_0}+\ldots p_1\cdot 1^{n_0}+p_0\cdot 0^{n_0}}\sum_{i=0}^{n-n_0}a_i g^{(i-n_0)}(x)+R_n.$$

下面导出a_i的生成函数. 根据上述关系, 应有

$$\sum_{i=0}^{n-n_0}(k^{n-n_0-i}+p_{k-1}(k-1)^{n-n_0-i}+\ldots p_1\cdot 1^{n-n_0-i}+p_0\cdot 0^{n-n_0-i})\frac{a_i}{(n-n_0-i)!}=0.$$

设$a_i=\dfrac{b_i}{i!}$, 则 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-n_0}(k^{n-n_0-i}+p_{k-1}(k-1)^{n-n_0-i}+\ldots p_1\cdot 1^{n-n_0-i}+p_0\cdot 0^{n-n_0-i})\frac{b_i}{i!\cdot(n-n_0-i)!}=0$.

$$\sum_{i=0}^{n-n_0}\binom{n-n_0}{i}b_i(k^{n-n_0-i}+p_{k-1}(k-1)^{n-n_0-i}+\ldots p_1\cdot 1^{n-n_0-i}+p_0\cdot 0^{n-n_0-i})=0.$$

设$\dfrac{\frac{1}{n_0!}\left(k^{n_0}+p_{k-1}\cdot(k-1)^{n_0}+\ldots+p_1\cdot 1^{n_0}+p_0\cdot 0^{n_0}\right)x^{n_0}}{e^{kx}+p_{k-1}\cdot e^{(k-1)x}+\ldots+p_1\cdot e^x+p_0}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{b_n}{n!}x^n$, 则

$$\frac{\frac{1}{n_0!}\left(k^{n_0}+p_{k-1}\cdot(k-1)^{n_0}+\ldots+p_1\cdot 1^{n_0}+p_0\cdot 0^{n_0}\right)x^{n_0}}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(k^n+p_{k-1}(k-1)^n+\ldots p_1\cdot 1^n+p_0\cdot 0^n\right)x^n}$$

$$=\frac{\frac{1}{n_0!}\left(k^{n_0}+p_{k-1}\cdot(k-1)^{n_0}+\ldots+p_1\cdot 1^{n_0}+p_0\cdot 0^{n_0}\right)x^{n_0}}{\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(k^n+p_{k-1}(k-1)^n+\ldots p_1\cdot 1^n+p_0\cdot 0^n\right)x^n}$$

$$=\frac{\frac{1}{n_0!}\left(k^{n_0}+p_{k-1}\cdot(k-1)^{n_0}+\ldots+p_1\cdot 1^{n_0}+p_0\cdot 0^{n_0}\right)}{\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(k^{n_0}+p_{k-1}\cdot(k-1)^{n_0}+\ldots+p_1\cdot 1^{n_0}+p_0\cdot 0^{n_0}\right)x^{n-n_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n.$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(k^n+p_{k-1}(k-1)^n+\ldots p_1\cdot 1^n+p_0\cdot 0^n\right)x^{n-n_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n$$

$$=\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-n_0}\binom{n}{i}b_i\left(k^{n+n_0-i}+p_{k-1}(k-1)^{n+n_0-i}+\ldots p_1\cdot 1^{n+n_0-i}+p_0\cdot 0^{n+n_0-i}\right)x^n$$

$$=\frac{1}{n_0!}\left(k^{n_0}+p_{k-1}\cdot(k-1)^{n_0}+\ldots+p_1\cdot 1^{n_0}+p_0\cdot 0^{n_0}\right).$$

$\therefore b_0=1$. $\sum_{i=0}^{n-n_0}\binom{n-n_0}{i}b_i\left(k^{n-n_0-i}+p_{k-1}(k-1)^{n-n_0-i}+\ldots p_1\cdot 1^{n-n_0-i}+p_0\cdot 0^{n-n_0-i}\right)=0(i\geq 1)$.

由以上递推关系及初值条件所确定的序列是唯一的, $\therefore b_n$ 的生成函数为

$$\frac{\frac{1}{n_0!}\left(k^{n_0}+p_{k-1}\cdot(k-1)^{n_0}+\ldots+p_1\cdot 1^{n_0}+p_0\cdot 0^{n_0}\right)x^{n_0}}{e^{kx}+p_{k-1}\cdot e^{(k-1)x}+\ldots+p_1\cdot e^x+p_0}.$$

设 $\frac{x^{n_0}}{e^{kx}+p_{k-1}\cdot e^{(k-1)x}+\ldots+p_1\cdot e^x+p_0}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n$,

则 $f(x)=\frac{n_0!}{k^{n_0}+p_{k-1}(k-1)^{n_0}+\ldots p_1\cdot 1^{n_0}+p_0\cdot 0^{n_0}}\sum_{n=0}^{N}\frac{b_n}{n!}g^{(i-n_0)}(x)+R_N$

5. 级数与定积分之间的转化

一些级数可以通过一定的方法转化成定积分. 虽然这样做以后并不一定能立刻得到更多的结论. 但它有利于我们去寻找一种统一的、有效的方法来系统地处理它们. 这一部分得出的结果有些与第六部分的讨论有关.

(1) $\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{x^s}$

$\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{x^s}=\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{x^s}\cdot\frac{1}{(s-1)!}\cdot\int_0^{\infty}e^{-\xi}\xi^{s-1}d\xi=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\sum_{x=1}^{n}\int_0^{\infty}e^{-\xi}\left(\frac{\xi}{x}\right)^{s-1}d\frac{\xi}{x}$. 令 $t=\frac{\xi}{x}$,

则 $\frac{1}{(s-1)!}\cdot\sum_{x=1}^{n}\int_0^{\infty}e^{-\xi}\left(\frac{\xi}{x}\right)^{s-1}d\frac{\xi}{x}=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\sum_{x=1}^{n}\int_0^{\infty}e^{-x\cdot t}t^{s-1}dt=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\int_0^{\infty}\sum_{x=1}^{n}e^{-x\cdot t}t^{s-1}dt$

$$=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\int_0^{\infty}e^{-t}\frac{1-e^{-n\cdot t}}{1-e^{-t}}t^{s-1}dt.$$

当 $n\to\infty$ 时, $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^s}=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}t^{s-1}dt=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt=\frac{1}{\Gamma(s)}\cdot\int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt$.

最后一个式子可以作为 $\zeta(s)$ 的表达式.

类似地, 我们可以求

$$\sum_{x=0}^{n}\frac{1}{(x+a)^s}=\sum_{x=0}^{n}\frac{1}{(x+a)^s}\cdot\frac{1}{(s-1)!}\cdot\int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{s-1}d\xi=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\sum_{x=0}^{n}\int_0^\infty e^{-\xi}\left(\frac{\xi}{x+a}\right)^{s-1}d\,\frac{\xi}{x+a}$$
$$=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\sum_{x=0}^{n}\int_0^\infty e^{-(x+a)\cdot t}t^{s-1}dt=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\sum_{x=0}^{n}\int_0^\infty e^{-a\cdot t}e^{-t\cdot x}t^{s-1}dt=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\int_0^\infty e^{-a\cdot t}\sum_{x=o}^{n}e^{-t\cdot x}t^{s-1}dt$$
$$=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\int_0^\infty e^{-a\cdot t}\sum_{x=o}^{n}e^{-t\cdot x}t^{s-1}dt=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\int_0^\infty e^{-a\cdot t}\frac{1-e^{-n\cdot t}}{1-e^{-t}}t^{s-1}dt\,.$$

当$n\to\infty$时, $\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{(x+a)^s}=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\int_0^\infty\frac{e^{-a\cdot t}}{1-e^{-t}}t^{s-1}dt=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\int_0^\infty\frac{e^{(1-a)\cdot t}}{e^t-1}t^{s-1}dt=\frac{1}{\Gamma(s)}\cdot\int_0^\infty\frac{e^{(1-a)\cdot t}}{e^t-1}t^{s-1}dt\,.$
此即是 Hurwitz Zeta 函数$\zeta(s,a)$.

$$\sum_{x=0}^{n}\frac{(-1)^x}{(x+a)^s}=\sum_{x=0}^{n}\frac{(-1)^x}{(x+a)^s}\cdot\frac{1}{(s-1)!}\cdot\int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{s-1}d\xi=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\sum_{x=0}^{n}\int_0^\infty(-1)^x e^{-\xi}\left(\frac{\xi}{x+a}\right)^{s-1}d\,\frac{\xi}{x+a}$$
$$=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\sum_{x=0}^{n}\int_0^\infty(-1)^x e^{-(x+a)\cdot t}t^{s-1}dt=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\sum_{x=0}^{n}\int_0^\infty(-1)^x e^{-a\cdot t}e^{-t\cdot x}t^{s-1}dt$$
$$=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\int_0^\infty e^{-a\cdot t}\sum_{x=o}^{n}(-1)^x e^{-t\cdot x}t^{s-1}dt=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\int_0^\infty e^{-a\cdot t}\frac{1+(-e^{-t})^{n+1}}{1+e^{-t}}t^{s-1}dt\,.$$

当$n\to\infty$时, $\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(-1)^x}{(x+a)^s}=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\int_0^\infty\frac{e^{-a\cdot t}}{1+e^{-t}}t^{s-1}dt=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\int_0^\infty\frac{e^{(1-a)\cdot t}}{e^t+1}t^{s-1}dt=\frac{1}{\Gamma(s)}\cdot\int_0^\infty\frac{e^{(1-a)\cdot t}}{e^t+1}dt\,.$

(2) $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^x}$

$$\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^x}=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^x}\cdot\frac{1}{(x-1)!}\cdot\int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{x-1}d\xi=\sum_{x=1}^{\infty}\int_0^\infty\frac{1}{(x-1)!}e^{-\xi}\left(\frac{\xi}{x}\right)^{x-1}d\,\frac{\xi}{x}=\sum_{x=1}^{\infty}\int_0^\infty\frac{1}{(x-1)!}e^{-x\cdot t}t^{x-1}dt$$
$$=\int_0^\infty\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{(x-1)!}\cdot e^{-x\cdot t}t^{x-1}dt=\int_0^\infty e^{-t}\cdot\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{(x-1)!}\cdot e^{-(x-1)\cdot t}t^{x-1}dt=\int_0^\infty e^{-t}\cdot e^{e^{-t}\cdot t}dt\,.$$
令$x=e^{-t}$, 则$t=-\ln(x)$, $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^x}=\int_0^\infty e^{-t}\cdot e^{e^{-t}\cdot t}dt=\int_1^0 x\cdot(e^{-t})^{-e^{-t}}d(-\ln(x))$
$$=\int_1^0 x\cdot x^{-x}(-\frac{1}{x})dx=-\int_1^0 x^{-x}dx=\int_0^1 x^{-x}dx=\int_0^1\frac{1}{x^x}dx\,.$$
这里我们得到了一个有趣的事实: $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^x}=\int_0^1\frac{1}{x^x}dx\,.$

(3) $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x\cdot x!}$

在得出这个级数的和之前, 我们先证明一个与此相关的定理. 首先需要证明一个引理.

引理 3: $\dfrac{1}{\prod_{i=0}^{k}(n+i)}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}\dfrac{1}{i!\cdot(n-i)!}\cdot\dfrac{1}{(n+i)}(k\geq 1,k\in N)$.

证明: 设 $\dfrac{1}{\prod_{i=0}^{k}(n+i)}=\sum_{i=0}^{k}a_{i}\dfrac{1}{(n+i)}$, 则 $1=\sum_{i=0}^{k}a_{i}\dfrac{\prod_{i=0}^{k}(n+i)}{n+i}=\sum_{i=0}^{k}a_{i}\prod_{j\neq i}(n+i)$ ($j\in\{1,2,\ldots k\}$).

取 $n=-i(i=0,1,\ldots k)$, 得 $1=a_{i}\prod_{j\neq i}(j-i)$, $a_{i}=\dfrac{1}{\prod_{j\neq i}(j-i)}=\dfrac{1}{\prod_{j<i}(j-i)}\cdot\dfrac{1}{\prod_{j>i}(j-i)}=(-1)^{i}\dfrac{1}{i!}\cdot\dfrac{1}{(n-i)!}$.

定理 4: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\prod_{i=0}^{k}(n+i)}=\dfrac{1}{k\cdot k!}$ $(k\geq 1,k\in N)$.

证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\prod_{i=0}^{k}(n+i)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}\frac{1}{i!\cdot(n-i)!}\cdot\frac{1}{(n+i)}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}\frac{1}{k!}\binom{k}{i}\frac{1}{(n+i)}\right)=\frac{1}{k!}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}\binom{k}{i}\frac{1}{(n+i)}\right)$$

$$=\frac{1}{k!}\cdot\left(\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{i}\binom{k}{i}\left(\sum_{n=i}^{k-1}\frac{1}{n+1}\right)+\sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}\binom{k}{i}\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{k!}\cdot\left(\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{i}\binom{k}{i}\left(\sum_{n=i}^{k-1}\frac{1}{n+1}\right)\right).$$

后一个式子用到了 $\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}\binom{k}{i}=0$.

$$\frac{1}{k!}\cdot\left(\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{i}\binom{k}{i}\left(\sum_{n=i}^{k-1}\frac{1}{n+1}\right)\right)=\frac{1}{k!}\cdot\left(\sum_{n=1}^{k}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i}\binom{k}{i}\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{k!}\cdot\left(\sum_{n=1}^{k}(-1)^{n}\binom{k-1}{n-1}\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{k!}\cdot\left(\sum_{n=1}^{k}(-1)^{n}\binom{k}{n}\cdot\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k\cdot k!}\left(\sum_{n=1}^{k}(-1)^{n}\binom{k}{n}\right)=\frac{1}{k\cdot k!}.$$

$$\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x\cdot x!}=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^{2}\cdot(x-1)!}=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^{2}\cdot(x-1)!}\int_{0}^{\infty}e^{-\xi}\xi d\xi=\sum_{x=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\xi}}{(x-1)!}\left(\frac{\xi}{x}\right)d\frac{\xi}{x}=\sum_{x=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-x\cdot t}}{(x-1)!}tdt$$

$$=\int_{0}^{\infty}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{(x-1)!}\cdot e^{-x\cdot t}tdt=\int_{0}^{\infty}e^{-t}\cdot e^{e^{-t}}\cdot tdt.$$

令 $x=e^{-t}$, 则 $\sum_{x=1}^{\infty}\dfrac{1}{x\cdot x!}=-\int_{0}^{1}x\cdot e^{x}\cdot(-\ln(x))d(-\ln(x))=\int_{0}^{1}x\cdot e^{x}\cdot\ln(x)\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)dx=-\int_{0}^{1}e^{x}\cdot\ln(x)dx$.

类似地, $\sum_{x=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^{n-1}\cdot x!}=\sum_{x=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^{n}\cdot(x-1)!}=\sum_{x=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^{n}\cdot(x-1)!}\dfrac{1}{(n-1)!}\int_{0}^{\infty}e^{-\xi}\xi^{n-1}d\xi$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{x=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\xi}}{(x-1)!}\left(\frac{\xi}{x}\right)^{n-1}d\,\frac{\xi}{x}=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\sum_{x=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{e^{-x\cdot t}}{(x-1)!}t^{n-1}dt=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\int_0^{\infty}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{e^{-x\cdot t}}{(x-1)!}\cdot t^{n-1}dt$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\int_0^{\infty}e^{-t}\cdot\sum_{x=1}^{\infty}\frac{e^{-(x-1)\cdot t}}{(x-1)!}\cdot t^{n-1}dt=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\int_0^{\infty}e^{-t}\cdot e^{e^{-t}}\cdot t^{n-1}dt\,.$$

令 $x=e^{-t}$, 则 $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^{n-1}\cdot x!}=-\frac{1}{(n-1)!}\cdot\int_0^1 x\cdot e^{x}\cdot(-\ln(x))^{n-1}d(-\ln(x))$

$$=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\cdot\int_0^1 x\cdot e^{x}\cdot(\ln(x))^{n-1}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\int_0^1 e^{x}\cdot\left(\ln(x)\right)^{n-1}dx=\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}\cdot\int_0^1 e^{x}\cdot\left(\ln(x)\right)^{n-1}dx\,.$$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}}$

根据 $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)=\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)$, $\frac{1}{\binom{2n}{n}}=\frac{\Gamma^2(n+1)}{\Gamma(2n+1)}$

$$=\frac{\Gamma(2n+2)}{\Gamma(2n+1)}\cdot B(n+1,n+1)=(2n+1)B(n+1,n+1)=(2n+1)\int_0^1 x^n(1-x)^n dx=\int_0^1(2n+1)(x-x^2)^n dx\,.$$

根据 Abel 分部求和公式, $\sum(2n+1)(x-x^2)^n\Delta n=\sum(2n+1)\Delta\frac{(x-x^2)^n}{x-x^2-1}$

$$=(2n+1)\frac{(x-x^2)^n}{x-x^2-1}-\sum\frac{(x-x^2)^{n+1}}{x-x^2-1}\Delta(2n+1)=(2n+1)\frac{(x-x^2)^n}{x-x^2-1}-2\sum\frac{(x-x^2)^{n+1}}{x-x^2-1}\Delta n$$

$$=(2n+1)\frac{(x-x^2)^n}{x-x^2-1}-2\frac{(x-x^2)^{n+1}}{(x-x^2-1)^2}\,.$$

$\because 0\le x,1-x\le 1$, $\therefore 0\le x(1-x)=x-x^2<1$. $\lim_{n\to\infty}(2n+1)\frac{(x-x^2)^n}{x-x^2-1}-2\frac{(x-x^2)^{n+1}}{(x-x^2-1)^2}=0$

$$\lim_{n\to 1}(2n+1)\frac{(x-x^2)^n}{x-x^2-1}-2\frac{(x-x^2)^{n+1}}{(x-x^2-1)^2}=\frac{3(x-x^2)}{x-x^2-1}-\frac{2(x-x^2)^2}{(x-x^2-1)^2}=\frac{x^4-2x^3+4x^2-3x}{(x-x^2-1)^2}\,.$$

$$\sum\nolimits_1^{\infty}(2n+1)(x-x^2)^n\Delta n=-\frac{x^4-2x^3+4x^2-3x}{(x-x^2-1)^2}\,.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1(2n+1)(x-x^2)^n dx=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(x-x^2)^n dx=\int_0^1\left(\sum\nolimits_1^{\infty}(2n+1)(x-x^2)^n\Delta n\right)dx$$

$$=-\int_0^1\frac{x^4-2x^3+4x^2-3x}{(x-x^2-1)^2}dx=\left(\frac{2(2x-1)}{3(x^2-x+1)}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{3}\pi}{27}\,.$$

类似地, 可以求出$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s\binom{2n}{n}}$在$s\le 1(s\in Z)$处的值. 还可以求出$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s\binom{2n}{n}}$在$s\le 1(s\in Z)$处的值. 另外还有$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}=\frac{1}{3}\zeta(2)=\frac{\pi^2}{18}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4\binom{2n}{n}}=\frac{17}{36}\zeta(4)=\frac{17\pi^4}{3240}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}}=\frac{2}{5}\zeta(3)$. 这些恒等式成为 Apery 证明$\zeta(2)$和$\zeta(3)$的无理性的工具.

6. Euler-Maclaurin 公式的进一步应用

前面推导出的 Euler-Maclaurin 公式是一个很强有力的分析工具. 然而, 之前我们只是用它处理了一些收敛级数. 用它来处理一些发散级数仍会得到一些很重要的结果. 因为是处理发散级数, 所以中间过程中存在着一些不严格之处, 但是结果可以证明是正确的. 应用 Poincare 关于发散级数的理论可以提供一个严密的证明.

(1) $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^2}$.

引理 4: $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{1}{x^2}=(-1)^{n-1}\frac{n!}{x^{n+1}}(n\in N)$.

证明: 当$n=0$时, $\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x}$, 此时引理成立.

假设当$n=k$时, 引理成立. 则当$n=k+1$时, $\frac{d^k}{dx^k}\frac{1}{x^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\frac{1}{x^2}\right)=\frac{d}{dx}\left((-1)^{k-1}\frac{k!}{x^{k+1}}\right)$

$=(-1)^{k-1}\cdot k!\cdot\frac{-(k+1)}{x^{k+2}}=(-1)^k\cdot\frac{(k+1)!}{x^{k+2}}$, 此时引理也成立.

综上, 引理成立.

$\sum\frac{1}{x^2}\Delta x=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{1}{x^2}=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(-1)^{n-1}\frac{n!}{x^{n+1}}=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}B_n}{x^{n+1}}$. 这个级数除了当$x\to\infty$时$\to 0$之外都是发散的. 但是我们可以形式地计算它的发散和.

由$\frac{-t}{e^{-t}-1}=\sum_{n=o}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}t^n$, 得

$\int_0^{\infty}e^{-x\cdot t}\cdot\frac{-t}{e^{-t}-1}dt=\int_0^{\infty}e^{-x\cdot t}\cdot\sum_{n=o}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}t^n dt=\sum_{n=o}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}\int_0^{\infty}e^{-x\cdot t}\cdot t^n dt$. 令$\xi=x\cdot t$, 则

$\sum_{n=o}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}\int_0^{\infty}e^{-x\cdot t}\cdot t^n dt=\sum_{n=o}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}\int_0^{\infty}e^{-\zeta}\cdot\left(\frac{\xi}{x}\right)^n d\frac{\xi}{x}=\sum_{n=o}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^{\infty}e^{-\zeta}\cdot\xi^n d\xi$

$=\sum_{n=o}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}\frac{1}{x^{n+1}}n!=\sum_{n=o}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{x^{n+1}}$. 即$\sum\frac{1}{x^2}\Delta x=-\int_0^{\infty}e^{-x\cdot t}\cdot\frac{-t}{e^{-t}-1}dt$. 这里用到了 Laplace 变换.

$\therefore\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^2}=\sum_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\Delta x=-\lim_{x\to\infty}\int_0^{\infty}e^{-x\cdot t}\cdot\frac{-t}{e^{-t}-1}dt+\int_0^{\infty}e^{-x\cdot t}\cdot\frac{-t}{e^{-t}-1}dt\bigg|_{x=1}=\int_0^{\infty}e^{-t}\cdot\frac{-t}{e^{-t}-1}dt=\int_0^{\infty}\frac{t}{e^t-1}dt$.

这与前面得到的结果相同.

(2) $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^s}(s\ge 2, s\in N)$.

引理 5: $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{1}{x^s}=(-1)^{n-1}\frac{(s)^{(n-2)}}{x^{s+n-1}}=(-1)^{n-1}\frac{(s+n-2)!}{(s-1)!\cdot x^{\upsilon+n-1}}(s\ge 2, s\in N, n\in N)$, 其中 $(s)^{(n-2)}=s\cdot(s+1)\ldots(s+n-2)$ 表示上升阶乘函数, $(s)^{(-n)}=1(n\in N)$.

此引理的证明与引理 4 很类似, 故从略.

$$\sum\frac{1}{x^s}\Delta x=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{1}{x^s}=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(-1)^{n-1}\frac{(s+n-2)!}{(s-1)!\cdot x^{s+n-1}}=\frac{1}{(s-1)!}\sum_{n=o}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(s+n-2)!B_n}{n!\cdot x^{s+n-1}}$$

$$=\frac{1}{(s-1)!}\sum_{n=o}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n+1)^{(s-3)}\cdot B_n}{x^{s+n-1}}.$$

由上题结论, $\sum_{n=o}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{x^{n+1}}=-\int_0^{\infty}e^{-x\cdot t}\cdot\frac{-t}{e^{-t}-1}dt$. 则

$$\frac{d^{s-2}}{dx^{s-2}}\sum_{n=o}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{x^{n+1}}=\sum_{n=o}^{\infty}(-1)^n B_n\frac{d^{s-2}}{dx^{s-2}}\frac{1}{x^{n+1}}=\sum_{n=o}^{\infty}(-1)^n B_n\frac{(n+1)^{(s-3)}}{x^{n+s-1}}=-\frac{d^{s-2}}{dx^{s-2}}\int_0^{\infty}e^{-x\cdot t}\cdot\frac{-t}{e^{-t}-1}dt$$

$$=-\int_0^{\infty}\frac{\partial^{s-2}}{\partial x^{s-2}}e^{-x\cdot t}\cdot\frac{-t}{e^{-t}-1}dt=-\int_0^{\infty}e^{-x\cdot t}\cdot(-t)^{s-2}\cdot\frac{-t}{e^{-t}-1}dt=-\int_0^{\infty}e^{-x\cdot t}\cdot\frac{(-t)^{s-1}}{e^{-t}-1}dt.$$

$$\therefore\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^s}=\sum\nolimits_1^{\infty}\frac{1}{x^s}\Delta x=(-1)^{s-1}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(s-1)!}\int_0^{\infty}e^{-x\cdot t}\cdot\frac{(-t)^{s-1}}{e^{-t}-1}dt-\frac{1}{(s-1)!}\int_0^{\infty}e^{-x\cdot t}\cdot\frac{(-t)^{s-1}}{e^{-t}-1}dt\bigg|_{x=1}\right)$$

$$=(-1)^{s-1}\frac{1}{(s-1)!}\int_0^{\infty}e^{-t}\cdot\frac{(-t)^{s-1}}{e^{-t}-1}dt=\frac{1}{(s-1)!}\int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt.$$

(3) $\sum_{t=1}^{x}\frac{1}{t}$.

引理 6: $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\frac{1}{t}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{t^n}(n\ge 1)$. 证明从略.

$$\sum\frac{1}{t}\Delta t=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\frac{1}{t}=\ln(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{t^n}=\ln(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}B_n}{n\cdot t^n}.$$

$\frac{1}{\xi}\left(\frac{-\xi}{e^{-\xi}-1}-1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}\xi^{n-1}$. 则 $\int_0^{\infty}\frac{e^{-t\cdot\xi}}{\xi}\cdot\left(\frac{-\xi}{e^{-\xi}-1}-1\right)d\xi=\int_0^{\infty}e^{-t\cdot\xi}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}\xi^{n-1}\right)d\xi$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}\int_0^{\infty}e^{-t\cdot\xi}\cdot\xi^{n-1}d\xi\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}\int_0^{\infty}e^{-y}\cdot\left(\frac{y}{t}\right)^{n-1}d\frac{y}{t}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}\frac{1}{t^n}\int_0^{\infty}e^{-y}\cdot y^{n-1}dy$$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}\frac{1}{t^n}(n-1)!=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n\cdot t^n}$. 即 $\sum\frac{1}{t}\Delta t=\ln(t)-\int_0^{\infty}\frac{e^{-t\cdot\xi}}{\xi}\cdot\left(\frac{-\xi}{e^{-\xi}-1}-1\right)d\xi$.

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t\cdot\xi}}{\xi}\cdot\left(\frac{-\xi}{e^{-\xi}-1}-1\right)d\xi=0.$$

$$\sum_{t=1}^{x}\frac{1}{t}=\sum\nolimits_{1}^{x+1}\frac{1}{t}\Delta t=\ln(t)\Big|_{1}^{x+1}-\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-t\cdot\xi}}{\xi}\cdot\left(\frac{-\xi}{e^{-\xi}-1}-1\right)d\xi\Bigg|_{1}^{x+1}=\ln(x+1)+o(1)+\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\xi}}{\xi}\cdot\left(\frac{-\xi}{e^{-\xi}-1}-1\right)d\xi$$

$$=\ln(x+1)+o(1)-\int_{0}^{\infty}e^{-\xi}\cdot\left(\frac{1}{e^{-\xi}-1}+\frac{1}{\xi}\right)d\xi .$$

当 $x\to\infty$ 时, $\sum_{t=1}^{x}\frac{1}{t}\sim\ln(x+1)+\gamma\sim\ln(x)+\gamma$, 其中 $\gamma=-\int_{0}^{\infty}e^{-\xi}\cdot\left(\frac{1}{e^{-\xi}-1}+\frac{1}{\xi}\right)d\xi$ 即是所谓的 Euler-Mascheroni 常数. $\gamma=0.5772156649\ldots$

(4) $\sum_{t=1}^{x}\ln(t)$.

引理 7: $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\ln(t)=(-1)^{n}\frac{(n-2)!}{t^{n-1}}(n\geq 2)$. 证明从略.

$$\sum\ln(t)\Delta t=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\ln(t)=t\ln(t)-t-\frac{1}{2}\ln(t)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(-1)^{n}\frac{(n-2)!}{t^{n-1}}$$

$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)\ln(t)-t+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}B_n}{n\cdot(n-1)\cdot t^{n-1}} .$$

$$\frac{-\xi}{e^{-\xi}-1}=\sum_{n=o}^{\infty}(-1)^{n}\frac{B_n}{n!}\xi^{n},\quad \frac{1}{\xi^{2}}\left(\frac{-\xi}{e^{-\xi}-1}-1-\frac{\xi}{2}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{B_n}{n!}\xi^{n-2} .$$

则 $\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-t\cdot\xi}}{\xi^{2}}\cdot\left(\frac{-\xi}{e^{-\xi}-1}-1-\frac{\xi}{2}\right)d\xi=\int_{0}^{\infty}e^{-t\cdot\xi}\cdot\left(\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{B_n}{n!}\xi^{n-2}\right)d\xi=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{B_n}{n!}\int_{0}^{\infty}e^{-t\cdot\xi}\cdot\xi^{n-2}d\xi$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{B_n}{n!}\int_{0}^{\infty}e^{-y}\cdot\left(\frac{y}{t}\right)^{n-2}d\,\frac{y}{t}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{B_n}{n!}\frac{1}{t^{n-1}}\int_{0}^{\infty}e^{-y}\cdot y^{n-2}dy$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{B_n}{n!}\frac{1}{t^{n-1}}(n-2)!=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{B_n}{n\cdot(n-1)\cdot t^{n-1}} .$$

即 $\sum\ln(t)\Delta t=\left(t-\frac{1}{2}\right)\ln(t)+\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-t\cdot\xi}}{\xi^{2}}\cdot\left(\frac{-\xi}{e^{-\xi}-1}-1-\frac{\xi}{2}\right)d\xi$.

$$\lim_{t\to\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-t\cdot\xi}}{\xi^{2}}\cdot\left(\frac{-\xi}{e^{-\xi}-1}-1-\frac{\xi}{2}\right)d\xi=0 .$$

$$\sum_{t=1}^{x}\ln(t)=\sum\nolimits_{1}^{x+1}\ln(t)\Delta t=\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)\ln(t)-t\right)\Bigg|_{1}^{x+1}+\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-t\cdot\xi}}{\xi^{2}}\cdot\left(\frac{-\xi}{e^{-\xi}-1}-1-\frac{\xi}{2}\right)d\xi\Bigg|_{1}^{x+1}$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln(x+1)-x+o(1)-\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\xi}}{\xi^{2}}\cdot\left(\frac{-\xi}{e^{-\xi}-1}-1-\frac{\xi}{2}\right)d\xi$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln(x+1)-x+o(1)+\int_{0}^{\infty}e^{-t\cdot\xi}\cdot\left(\frac{1}{\xi(e^{-\xi}-1)}+\frac{1}{\xi^{2}}+\frac{1}{2\xi}\right)d\xi .$$

当 $x\to\infty$ 时, $\sum_{t=1}^{x}\ln(t)\sim\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln(x+1)-x+C\sim\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln(x)-x+1+C$, 其中

$$C=\int_0^\infty e^{-t\cdot\xi}\cdot\left(\frac{1}{\xi(e^{-\xi}-1)}+\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{2\xi}\right)d\xi=\frac{1}{2}\ln(2\pi)-1.$$

后一个渐近式用到了

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln(x+1)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln(x)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=1.$$

$$\therefore\sum_{t=1}^{x}\ln(t)\sim\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln(x)-x+\frac{1}{2}\ln(2\pi).$$

推论 1: 当 $x\to\infty$ 时, $x!=\Gamma(x+1)\sim\sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}\cdot e^{-x}=\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$.

证明: $\Gamma(x+1)=x!=\prod_{t=1}^{x}t=\prod_{t=1}^{x}e^{\ln(t)}=e^{\sum_{t=1}^{x}\ln(t)}=e^{\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln(x)-x+o(1)+\frac{1}{2}\ln(2\pi)}=x^{x+\frac{1}{2}}\cdot e^{-x}\cdot e^{o(1)}\cdot e^{\frac{1}{2}\ln(2\pi)}$.

当 $x\to\infty$ 时, $x!=\Gamma(x+1)\sim x^{x+\frac{1}{2}}\cdot e^{-x}\cdot e^{\frac{1}{2}\ln(2\pi)}=\sqrt{2\pi}\cdot x^{x+\frac{1}{2}}\cdot e^{-x}=\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$.

(5) $\sum_{t=1}^{x}t\ln(t)$.

引理 8: $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}t\ln(t)=(-1)^{n-1}\frac{(n-3)!}{t^{n-2}}(n\geq 3)$. 证明从略.

$$\sum t\ln(t)\Delta t=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}t\ln(t)=\frac{t^2}{2}\ln(t)-\frac{t^2}{4}-\frac{1}{2}t\ln(t)+\frac{1}{12}(\ln(t)+1)$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(-1)^{n-1}\frac{(n-3)!}{t^{n-2}}=\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}+\frac{1}{12}\right)\ln(t)-\frac{t^2}{4}+\frac{1}{12}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}B_n}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)t^{n-1}}.$$

$$\frac{-\xi}{e^{-\xi}-1}=\sum_{n=o}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}\xi^n,\ \frac{1}{\xi^3}\left(\frac{-\xi}{e^{-\xi}-1}-1-\frac{\xi}{2}-\frac{\xi^2}{12}\right)=\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}\xi^{n-3}.$$

则 $\int_0^\infty\frac{e^{-t\cdot\xi}}{\xi^3}\left(\frac{-\xi}{e^{-\xi}-1}-1-\frac{\xi}{2}-\frac{\xi^2}{12}\right)d\xi=\int_0^\infty e^{-t\cdot\xi}\cdot\left(\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}\xi^{n-3}\right)d\xi=\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}\int_0^\infty e^{-t\cdot\xi}\cdot\xi^{n-3}d\xi$

$$=\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}\int_0^\infty e^{-y}\cdot\left(\frac{y}{t}\right)^{n-3}d\frac{y}{t}=\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}\frac{1}{t^{n-2}}\int_0^\infty e^{-y}\cdot y^{n-3}dy$$

$$=\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n!}\frac{1}{t^{n-2}}(n-3)!=\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{B_n}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot t^{n-1}}.$$

即 $\sum t\ln(t)\Delta t=\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}+\frac{1}{12}\right)\ln(t)-\frac{t^2}{4}+\frac{1}{12}-\int_0^\infty\frac{e^{-t\cdot\xi}}{\xi^3}\cdot\left(\frac{-\xi}{e^{-\xi}-1}-1-\frac{\xi}{2}-\frac{\xi^2}{12}\right)d\xi$.

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty\frac{e^{-t\cdot\xi}}{\xi^3}\cdot\left(\frac{-\xi}{e^{-\xi}-1}-1-\frac{\xi}{2}-\frac{\xi^2}{12}\right)d\xi=0.$$

$$\sum_{t=1}^{x} t\ln(t)=\sum_{1}^{x+1} t\ln(t)\Delta t=\left(\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}+\frac{1}{12}\right)\ln(t)-\frac{t^2}{4}+\frac{1}{12}\right)\Bigg|_1^{x+1}+o(1)+\int_0^{\infty}\frac{e^{-\xi}}{\xi^3}\cdot\left(\frac{-\xi}{e^{-\xi}-1}-1-\frac{\xi}{2}-\frac{\xi^2}{12}\right)d\xi$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{12}\right)\ln(x+1)-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+o(1)+\int_0^{\infty}\frac{e^{-\xi}}{\xi^3}\cdot\left(\frac{-\xi}{e^{-\xi}-1}-1-\frac{\xi}{2}-\frac{\xi^2}{12}\right)d\xi .$$

当 $x\to\infty$ 时, $\sum_{t=1}^{x} t\ln(t)\sim\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{12}\right)\ln(x+1)-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+C\sim\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{12}\right)\ln(x)-\frac{x^2}{4}+C$, 其中

$$C=\frac{1}{4}-\int_0^{\infty}e^{-\xi}\cdot\left(\frac{1}{\xi^2(e^{-\xi}-1)}+\frac{1}{\xi^3}+\frac{1}{2\xi^2}+\frac{1}{12\xi}\right)d\xi .$$

后一个渐近式用到了 $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{12}\right)\ln(x+1)-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{12}\right)\ln(x)=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{12}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}+o(1) .$$

推论 2: 当 $x\to\infty$ 时, $\prod_{t=1}^{x} t^t\sim A\cdot x^{\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{12}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4}}$. 其中

$$A=\exp\left(\frac{1}{4}-\int_0^{\infty}e^{-\xi}\cdot\left(\frac{1}{\xi^2(e^{-\xi}-1)}+\frac{1}{\xi^3}+\frac{1}{2\xi^2}+\frac{1}{12\xi}\right)d\xi\right).$$

证明: $\prod_{t=1}^{x} t^t=\prod_{t=1}^{x} e^{t\ln(t)}=e^{\sum_{t=1}^{x} t\ln(t)}\sim e^{\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{12}\right)\ln(x)-\frac{x^2}{4}+C}=A\cdot x^{\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{12}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4}}$.

其中 $A=\exp\left(\frac{1}{4}-\int_0^{\infty}e^{-\xi}\cdot\left(\frac{1}{\xi^2(e^{-\xi}-1)}+\frac{1}{\xi^3}+\frac{1}{2\xi^2}+\frac{1}{12\xi}\right)d\xi\right)$ 即是所谓的 Glaisher-Kinkelin 常数.

$A=1.2824271291\ldots$

(6) $\sum_{t=1}^{x}\arctan(t)$.

引理 10: $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\arctan(t)=\frac{P_{n-2}(t)}{(t^2+1)^{n-1}}\sim\frac{1}{t^n}(t\to\infty,n\ge 2)$. 其中 $P_{n-2}(t)$ 是关于 t 的 $n-2$ 次多项式.

证明: 当 $n=2$ 时, $\frac{d^1}{dt^1}\arctan(t)=\frac{1}{t^2+1}\sim\frac{1}{t^2}$, 此时引理成立.

假设当 $n=k(k\ge 2)$ 时, 引理成立. 则当 $n=k+1$ 时,

$$\frac{d^k}{dt^k}\arctan(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\arctan(t)\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{P_{k-2}(t)}{(t^2+1)^{k-1}}\right)=\frac{P_{k-3}(t)\cdot(t^2+1)^{k-1}-P_{k-2}(t)\cdot t\cdot(t^2+1)^{k-2}}{(t^2+1)^{2k-2}}$$

$=\frac{P_{k-3}(t)\cdot(t^2+1)-P_{k-2}(t)\cdot t}{(t^2+1)^k}=\frac{P_{k-1}(t)}{(t^2+1)^k}\sim\frac{1}{t^{k+1}}$, 此时引理也成立.

综上, 引理成立.

引理 11: 如果 $f_n(x)\sim\frac{1}{x^{n+1}}(x\to\infty,n\in N)$, 则 $\sum_{n=k}^{k'}a_n\cdot f_n(x)=O\left(\frac{1}{x^{k+1}}\right)(x\to\infty,k\ge 1)$.

证明: $\because\ f_n(x)\sim\dfrac{1}{x^{n+1}}(x\to\infty)$, $\therefore \exists b_n$ 和 M_n，使得当 $x\ge M_n$ 时，有 $f_n(x)\le b_n\cdot\dfrac{1}{x^{n+1}}$。

记 $c=\max\{a_k\cdot b_k,\dots,a_{k'}\cdot b_{k'}\}$，则 $\sum_{n=k}^{k'}a_n\cdot f_n(x)\le c\cdot\sum_{n=k}^{k'}\dfrac{1}{x^{n+1}}\le c\cdot\sum_{n=k}^{\infty}\dfrac{1}{x^{n+1}}=c\cdot\dfrac{1}{x^{k+1}-x^{k+2}}\le c\cdot\dfrac{1}{x^{k+1}}$

故 $\sum_{n=k}^{k'}a_n\cdot f_n(x)=O\left(\dfrac{1}{x^{k+1}}\right)(x\to\infty)$.

引理 12: $$\left.\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\arctan(t)\right|_{t=0}=\begin{cases}0(n\text{为奇数})\\(-1)^{\frac{n}{2}-1}\cdot(n-2)!(n\text{为偶数})\end{cases}(n\ge 2).$$

证明: 根据 $\arctan(t)$ 的 Taylor 展开式, $\arctan(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left.\frac{d^n}{dt^n}\arctan(t)\right|_{t=0}}{n!}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}t^{2n+1}$, 得

$$\left.\frac{d^n}{dt^n}\arctan(t)\right|_{t=0}=\begin{cases}0(n\text{为偶数})\\(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot(n-1)!(n\text{为奇数})\end{cases},\ \left.\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\arctan(t)\right|_{t=0}=\begin{cases}0(n\text{为奇数})\\(-1)^{\frac{n}{2}-1}\cdot(n-2)!(n\text{为偶数})\end{cases}.$$

$$\sum\arctan(t)\Delta t=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\arctan(t)=t\arctan(t)-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-\frac{1}{2}\arctan(t)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\arctan(t)$$
$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)\arctan(t)-\ln\sqrt{t^2+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\arctan(t).$$

$$\sum_{t=1}^{x}\arctan(t)=\sum_{t=0}^{x}\arctan(t)=\sum\nolimits_0^{x+1}\arctan(t)\Delta t=\left.\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)\arctan(t)-\ln\sqrt{t^2+1}\right)\right|_0^{x+1}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\left(\left.\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\arctan(t)\right|_0^{x+1}\right)\sim\left(x+\frac{1}{2}\right)\arctan(x+1)-\ln\sqrt{x^2+2x+2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}(-1)^{n-1}(2n-2)!=\left(x+\frac{1}{2}\right)\arctan(x+1)-\ln\sqrt{x^2+2x+2}+O\left(\frac{1}{x}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{2n(2n-1)}.$$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}=\dfrac{x}{2}\cot(\dfrac{x}{2})$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-2}=\dfrac{1}{x^2}\left(1-\dfrac{x}{2}\cot\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$. 则

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-t\cdot\xi}}{\xi^2}\left(1-\frac{\xi}{2}\cot\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)d\xi=\int_0^{\infty}e^{-t\cdot\xi}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}\xi^{2n-2}=\right)d\xi=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}\int_0^{\infty}e^{-t\cdot\xi}\cdot\xi^{2n-2}d\xi$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}\int_0^{\infty}e^{-y}\cdot\left(\frac{y}{t}\right)^{2n-2}d\frac{y}{t}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}\frac{1}{t^{2n-1}}\int_0^{\infty}e^{-y}\cdot y^{2n-2}dy$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}\frac{1}{t^{2n-1}}(2n-2)!\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{2n(2n-1)}\frac{1}{t^{2n-1}}.$$

当 $x \to \infty$ 时, $\sum_{t=1}^{x} \arctan(t) \sim \left(x+\frac{1}{2}\right)\arctan(x+1) - \ln\sqrt{x^2+2x+2} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{2n(2n-1)}$

$\sim \left(x+\frac{1}{2}\right)\arctan(x+1) - \ln\sqrt{x^2+2x+2} - c \sim \frac{\pi}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right) - \ln\sqrt{x^2+2x+2} - c = \frac{\pi}{2}x - \ln\sqrt{x^2+2x+2} - C$

其中 $C = \int_0^{\infty}\frac{e^{-t\cdot\xi}}{\xi^2}\left(1-\frac{\xi}{2}\cot\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)d\xi - \frac{\pi}{4}$.

(7) $\sum_{t=0}^{x} t^t$ (当 $t \to 0$ 时, $t^t = e^{t\ln(t)} \to e^0 = 1$. $\therefore t=0$ 是 t^t 的可去奇点. 我们定义当 $t=0$ 时, $t^t = 1$).

引理 13: $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}t^t = t^{t-n+1}\cdot P_{n-1}(t(\ln(t)+1)) \sim t^t(\ln(t)+1)^{n-1}(t\to\infty, n\geq 1)$.

证明: 当 $n=1$ 时, $\frac{d^0}{dt^0}t^t = t^t = t^t(\ln(t)+1)^0$, 此时引理成立.

假设当 $n=k(k\geq 1)$ 时, 引理成立. 则当 $n=k+1$ 时,

$\frac{d^k}{dt^k}t^t = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}t\right)^t = \frac{d}{dt}\left(t^{t-k+1}\cdot P_{k-1}(t(\ln(t)+1))\right) = t^{t-k}(t(\ln(t)+1)-k+1)\cdot P_{k-1}(t(\ln(t)+1))$

$+t^{t-k+1}\cdot P_{k-2}(t(\ln(t)+1))\cdot(\ln(t)+2) = t^{t-k}\cdot P_k(t(\ln(t)+1)) \sim t^t(\ln(t)+1)^k$, 此时引理也成立.

综上, 引理成立.

$$\sum t^t\Delta t = \sum_{n=o}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}t^t = \int t^t dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}t^t \sim \int t^t dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^t(\ln(t)+1)^{n-1} = \int t^t dt + \frac{t^t}{\ln(t)+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(\ln(t)+1)^n$$

$$= \int t^t dt + \frac{t^t}{\ln(t)+1}\left(\frac{\ln(t)+1}{e^{\ln(t)+1}-1}-1\right) = \int t^t dt + t^t\left(\frac{1}{e\cdot t-1}-\frac{1}{\ln(t)+1}\right)(t\to\infty).$$

$$\sum_{t=0}^{x} t^t = \sum_0^{x+1}t^t\Delta t = \int_0^{x+1}t^t dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}t^t\Big|_0^{x+1} \sim \int_0^{x+1}t^t dt + t^t\left(\frac{1}{e\cdot t-1}-\frac{1}{\ln(t)+1}\right)\Bigg|_{t=x+1} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n!}\left(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}t^t\Big|_{t=0}\right)$$

$= \int_0^{x+1}t^t dt + (x+1)^{x+1}\left(\frac{1}{e\cdot(x+1)-1}-\frac{1}{\ln(x+1)+1}\right) - C$, 其中 $C = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n!}\left(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}t^t\Big|_{t=0}\right)$ 为一常数(发散意义下的和).

致谢

感谢施洪亮老师在我研究这个问题时对我的指导以及提供的参考资料。也感谢复旦大学的周子翔教授以及哥伦比亚大学的汪健学长对我这篇论文提出的宝贵的意见和建议。

参考文献

[1]郭锡伯. 有限差计算与级数求和. 陕西科学技术出版社. 1984 年
[2]史济怀. 母函数. 上海教育出版社. 1981 年
[3]菲赫金哥尔茨. 微积分学教程(第八版). 高等教育出版社. 2006 年
[4]Lars Ahlfors. Complex Analysis(3 Edition). McGraw-Hill Science/Engineering/Math. 1979
[5]G.H.Hardy. Divergent Series. Chelsea Publishing Company. 1991

[6]潘承洞. 于秀源. 阶的估计. 山东科学技术出版社. 1983 年
[7]徐利治. 陈文忠. 渐近分析方法及应用. 国防工业出版社. 1991 年
[8]Morris.Kline. 古今数学思想(第二册、第四册). 上海科学技术出版社. 2002 年
[9]Charles.Jordan. Calculus of Finite Differences. Chelsea Publishing House. 1950
[10]余文卿. 级数求和法. 数学传播第十五卷第四期